Construire une gamme

- Pythagore, qui pensait que le monde pouvait être expliqué par les mathématiques, a été le premier à relier cette science à la musique. Il est à l'origine de la première gamme connue.

- **Problématique** : Il existe une infinité de fréquences, donc de notes possibles. Comment choisir alors les fréquences qui constitueront l'ensemble des notes d'une gamme ?

Document 1 : la ronde des quintes

- Pythagore veut créer une gamme, c'est-à-dire un nombre précis de notes. Seul problème : il y a une infinité de sons possibles. 11 propose alors de partir de la corde entière, puis de prendre la quinte, puis la quinte de la quinte, puis la quinte de la quinte de la quinte et ainsi de suite. Si la fréquence de la corde entière vaut 1, alors la fréquence de l'octave vaut le double, soit deux. On cherche donc les quintes dont la fréquence est comprise entre 1 et 2.
- Prenons une corde qui fait sonner un do.
  La première quinte vaut $\frac{3}{2}$ = 1,5. C'est le sol.
- La deuxième quinte de la quinte vaut $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\frac{3^2}{2^2}$ = 2,25 ; c'est au-delà de 2 (l'octave); on divise donc par deux cette fréquence pour la ramener dans notre octave de départ : on obtient alors 1,125. C'est le ré !
- La troisième quinte vaut $\frac{3^3}{2^3}$ = 3,38. On la ramène dans l'octave en divisant par deux ce qui donne : 1,69. C'est le la.
- La quatrième quinte vaut $\frac{3^4}{2^4}$= 5,06. On divise par deux : 2,53. C'est encore trop donc on divise à nouveau par deux : 1,256. C'est le mi.
- On continue comme cela jusqu'à la douzième quinte qui vaut $\frac{3^{12}}{2^{12}}$ = 129,75 que l'on réduit en divisant par deux six fois de suite pour obtenir 2,03. C'est, à très peu de chose près, la fréquence de l'octave !
- Cela signifie qu'en prenant douze fois de suite la quinte, on crée douze notes, la douzième étant l'octave de la première. Il ne reste plus qu'à mettre les fréquences dans l'ordre des fréquences croissantes (de la plus petite à la plus grande) pour obtenir les douze notes de la gamme chromatique.

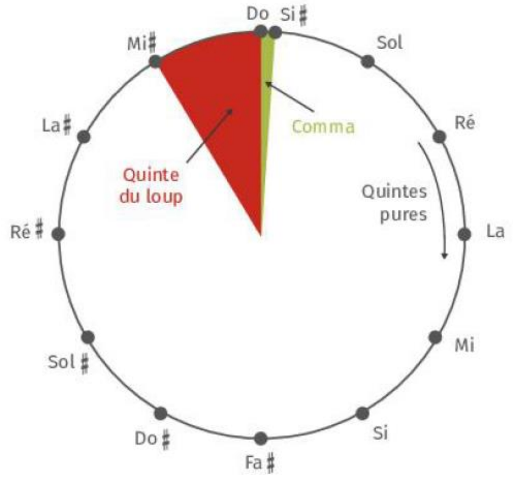
Antoine Houlou-Garcia, « La musique des nombres », Cosinus, n° 205 juin 2018.

Document 2 : Construction de la gamme naturelle dite de Pythagore

Note de base (Hz)	1re	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e	11e	12e	Nombre de divisions par 2 pour revenir dans l'octave de départ
	Fréquences des notes successives à la quinte (Hz)												
100	150	225	338	506	759	1 139	1 709	2 563	3 844	5 767	8 650	1 295	0
		113	169	253	380	570	854	1 281	1 922	2 883	4 325	6 487	1
				127	190	285	427	641	961	1 442	2 162	3 244	2
						142	214	320	481	721	1 081	1 622	3
							107	160	540	360	541	811	4
									120	180	270	405	5
											135	203	6
Do	*Sol*	*Ré*	*La*	*Mi*	*Si*	*Fa#*	*Do#*	*Sol#*	*Ré#*	*La#*	*Mi#*	*Si#*	

Attention, la note de base à 100 Hz n'est pas la fréquence d'un *do* réel mais une simple référence pour le calcul fait ici.

Document 3 : La quinte du loup



- Le problème de la gamme de Pythagore est le léger décalage entre la fréquence d'un do théorique à l'octave (200 Hz) et la fréquence de cette note obtenue en prenant 12 fois la quinte du do théorique de départ (203 Hz). On ne peut pas faire une boucle complète pour retomber exactement sur l'octave et plus on monte dans les octaves, plus ce décalage augmente. Il faut donc raccourcir la douzième quinte pure de 3 Hz (un comma) pour retrouver 200 Hz, la fréquence du do à l'octave. Une quinte qui associerait alors les notes mi# et do étant plus courte que ce qu'elle devrait, elle est très dissonante et semble hurler à la manière d'un loup, d'où son nom.

Document 4 : La gamme tempérée


Jean-Sébastien Bach (1685-1750).

- Pour résoudre le problème lié à la quinte du loup, de nombreux musiciens, dont Jean-Sébastien Bach notamment avec son livre Le Clavier bien tempéré paru en 1722, proposent une nouvelle manière de découper une gamme : la gamme tempérée.
- Le principe de la gamme tempérée, d'après Bach, est simple : « Le rapport de l'octave étant égal à 2 et contenant douze intervalles, il suffit de les diviser en 12 intervalles égaux (12 demi-tons). Le rapport de fréquences du demi-ton tempéré sera alors égal à la racine douzième de 2 (environ 1,05946) : $\sqrt[12]{2}$ = 1,059 463 094 359 3...
- En d'autres termes, si l'on multiplie 12 fois un nombre f par cette valeur on obtient exactement $2f$ », donc l'octave supérieure.

Questions

1) **Doc. 1 et 2** : Comment passe-t-on d'une colonne à l'autre dans le tableau ? Comment passe-t-on d'une ligne à l'autre dans le tableau ? Pourquoi faut-il diviser une ou plusieurs fois certaines fréquences obtenues par2 ?
2) **Doc. 1 et 2** : Mettez dans l'ordre les douze notes de la gamme chromatique.
3) **Doc. 2 et 3** : Comparez l'ordre des notes dans le tableau et l'ordre des notes sur le cercle (sens des aiguilles d'une montre). Que constatez-vous au bout de la 12e quinte ?
4) **Doc. 2 et 3** : Que représente le comma sur le cercle ? Expliquez ce qu'est la quinte du loup.
5) **Doc. 4** : Que proposent les musiciens dont Jean-Sébastien Bach pour répondre au problème posé par la quinte du loup ?
6) **Doc. 2 et 4** : Calculez la fréquence des 6 premières notes de la gamme tempérée en partant de la même note de base : do à 100 Hz. Comparez la fréquence de chacune de ces notes dans les deux gammes.
7) **Doc. 1,2, 3 et 4** : Pourquoi peut-on dire que la musique est l'art de faire entendre les nombres ?