TS | **Dérivées et primitives – Application au mouvement parabolique** | **AP**

$$\begin{tikzcd} \text{Position } x \arrow[r, bend left, "\text{Dérivation}"] & \text{Vitesse v} \arrow[l, bend left, "\text{Intégration}"] \arrow[r, bend left, "\text{Dérivation}"] & \text{Accélération a} \arrow[l, bend left, "\text{Intégration}"] \end{tikzcd}$$

I. Détermination d'une dérivée

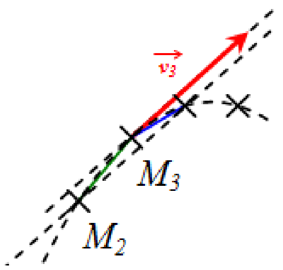
- Déterminons par exemple une vitesse à partir …

1. D'un vecteur position

- On utilise la relation $\overrightarrow{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$
- Si $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x = 3{,}0\, t^2 - 5{,}0\, t \\ y = 2{,}5\, t + 3{,}0 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} v_x = \dots\dots\dots\dots \\ v_y = \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$
- Et la vitesse, à la date $t = 2{,}0$ s, vaut alors :
  $\| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

> Soit $f(x)$: $f = 3x$
>
> La dérivée de $f(x)$ s'écrit $f'(x)$ ou $\dfrac{d\ f(x)}{dx}$
>
> Soit $x(t)$: $x = 3\,t$
>
> La dérivée de $x(t)$ s'écrit $\dfrac{d\ x(t)}{dt}$

2. D'un relevé de positions



On utilise la relation $\overrightarrow{v} = \dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$

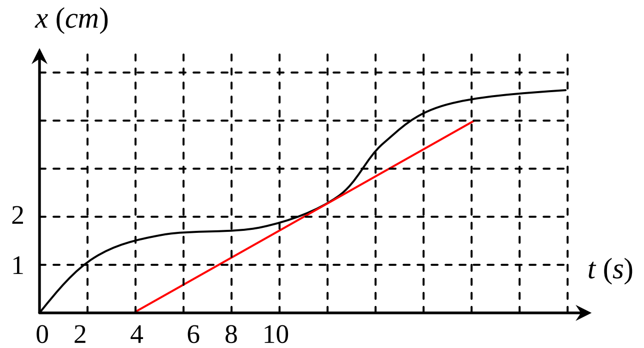
Ainsi, la vitesse au point M_3 est : $\| \overrightarrow{v_3} \| = v_3 \approx \dfrac{M_2M_4}{2\tau}$

> **Question** : si $\tau = 40$ ms, que vaut v_3 d'après le relevé de positions ci-contre

3. D'un graphe

3.1. On détermine la pente de la tangente à la date désirée. Ainsi, la vitesse du mobile selon l'axe (Ox) à la date $t = 12{,}0\ s$ est :

pente $= \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

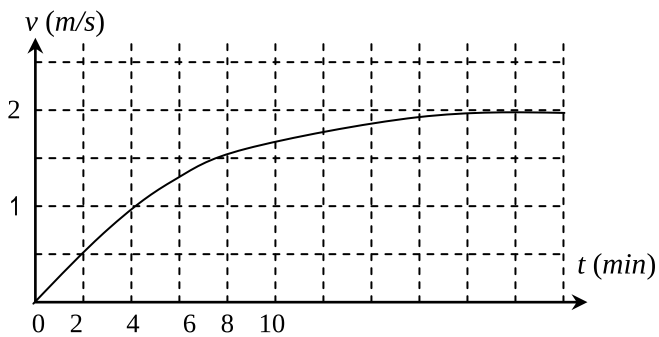


- **La pente de la tangente au point d'abscisse *t* d'une courbe donne la valeur de la dérivée à cette date.**

➢ Questions

3.2. Quelle est la grandeur que l'on calcule en déterminant la pente de la tangente à la courbe $v = f(t)$? ……………………………………

3.3. Déterminer graphiquement la valeur de cette grandeur dans les unités S.I. à la date $t = 0\ s$.



3.4. D'après le graphe que devient cette grandeur pour un temps très long ? Justifier.

……

……

II. Détermination d'une primitive

1. Questions

1.1. Quelle est la dérivée par rapport au temps t de $3t + 2$? ....

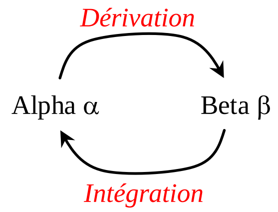
1.2. Même question pour $3t – 5$? ....

1.3. Conclure.

....

2. Exercice

- Soit une fonction $\alpha(t)$ telle que si on la dérive on obtient la fonction $\beta(t)$.
- On sait qu'à l'origine du temps ($t = 0$) la valeur de α est égale à 3,0.
- On sait aussi que la fonction $\beta(t)$ s'écrit : $\beta(t) = 2,0$.



2.1. Parmi les fonctions suivantes encercler celles qui, lorsqu'on les dérive, donnent β(t). :

3,0 t + 2,0	t + 2,0	2,0 t - 5,0	2,0 t^2 - 5,0	t^2	t^2 + 2,0 t + 1,0	2,0 t + 1,0

2.2. Donner une formule générale des fonctions qui, lorsqu'on les dérive, donnent β(t).

....

2.3. Parmi les fonctions encerclées en existe-t-il une qui peut être égale à α(t) ? Si oui laquelle ? Si non pourquoi ?

....

....

2.4. Donner l'expression correcte de la fonction α(t) telle qu'attendue par l'énoncé.

....

....

- Soit une fonction $v(t)$ telle que si on la dérive on obtient la fonction $a(t)$.
- On sait que la fonction $a(t)$ s'écrit $a(t) = -9,8$ dans les unités S.I.

2.5. Donner une formule générale de la fonction v(t) : ....

2.6. D'après cette expression, que vaut v à l'origine du temps ? ....

2.7. Si l'on sait qu'à l'origine du temps la valeur de v est égale à 3,0 m.s^{-1}, donner alors l'expression générale de la fonction v(t) : ....

2.8. Que vaut v à la date t = 12 s ?

....

2.9. Sachant que la fonction z(t) est telle que si on la dérive on obtient -9,8 t + 3,0, que faut-il faire pour trouver l'expression de z(t) ? ....

2.10. Parmi les expressions suivantes, encercler celle ou celles qui peuvent exprimer z(t) :

-9,8t² + 3,0t – 1,0	-9,8t² + 3,0	-4,9t² + 3,0t	-4,9t² + 3,0	-4,9t² + 3,0t – 7,0
-9,8t² + 3,0t – 7,0	-4,9t² + 9,8	-9,8t² + 3,0t	-4,9t² + 3,0t + 4,5	-9,8

2.11. Que faut-il alors connaître pour pouvoir choisir la bonne expression de z(t) ?

....

2.12. On sait qu'à l'origine du temps le mobile est à l'origine du repère. Déterminer l'expression correcte de z(t).

....

Formule générale pour la dérivée : $t^n \rightarrow n \cdot t^{n-1}$

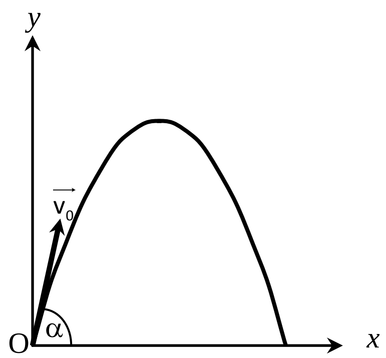
Formule générale pour la primitive : $t^n \rightarrow$ ………………..

III. Le rugby, sport d'évitement (Extrait Bac S)

Document : La chandelle
Au rugby, une « chandelle » désigne un coup de pied permettant d'envoyer le ballon en hauteur par-dessus la ligne de défense adverse. L'objectif pour l'auteur de cette action est d'être au point de chute pour récupérer le ballon derrière le rideau défensif.

D'après http://www.francerugby.fr/

- Pour simplifier l'étude :
  - les joueurs et le ballon seront supposés ponctuels.
  - On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
  - Le champ de pesanteur terrestre est considéré uniforme, de valeur g = 9,81 m.s^{-2}.
  - On négligera toutes les actions dues à l'air.
- Le joueur A est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vecteur vitesse $\overrightarrow{v_1}$.
- Afin d'éviter un plaquage, il réalise une chandelle au-dessus de son adversaire.
- On définit un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) :
  - Origine : position initiale du ballon ;
  - Vecteur unitaire $\vec{i}$ de même direction et de même sens que $\overrightarrow{v_1}$;
  - Vecteur unitaire $\vec{j}$ vertical et vers le haut.
- A l'instant t = 0 s, le vecteur vitesse du ballon fait un angle α égal à 60° avec l'axe Ox et sa valeur est v_0 = 10,0 m.s^{-1}.
- Le graphique ci-contre représente la trajectoire du ballon dans le repère choisi.



1. Étude du mouvement du ballon.

1.1. En utilisant la 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton, établir les coordonnées a_x et a_y du vecteur accélération $\vec{a}$ du point M représentant le ballon.

1.2. Déterminer les coordonnées v_x et v_y du vecteur vitesse $\vec{v}$.

1.3. Montrer que les équations horaires du mouvement du point M sont :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = (v_0 \times \cos\alpha) \times t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0 \times \sin\alpha) \times t \end{cases}$$

1.4. En déduire l'équation de la trajectoire du point M : $y(x) = -\dfrac{g}{2(v_0 \times \cos\alpha)^2} \times x^2 + (\tan\alpha) \times x$

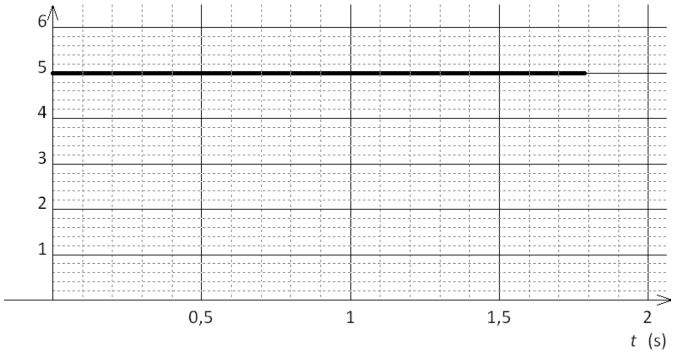
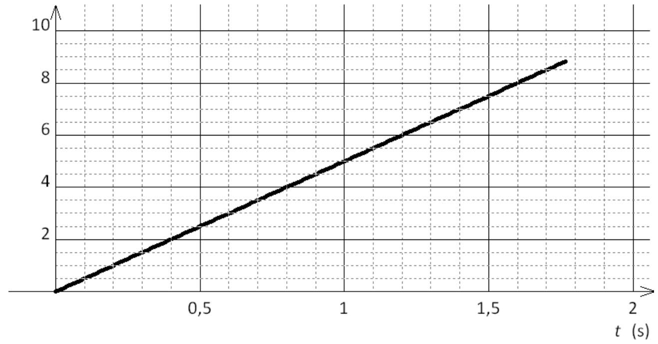
1.5. **Le tableau page 4** rassemble les représentations graphiques de l'évolution dans le temps des grandeurs x, y, v_x et v_y, coordonnées des vecteurs position et vitesse du point M.
Dans **le tableau page 4**, écrire sous chaque courbe l'expression de la grandeur qui lui correspond et justifier.

2. Une « chandelle » réussie

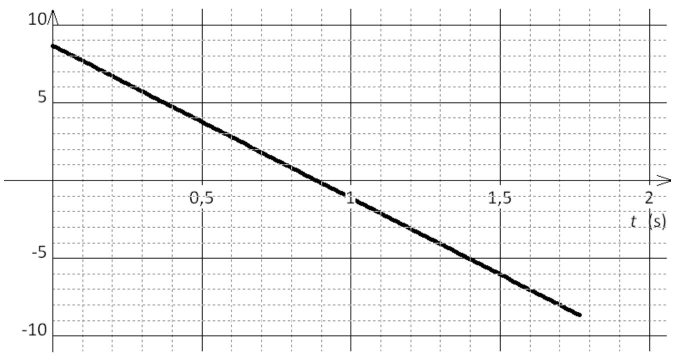
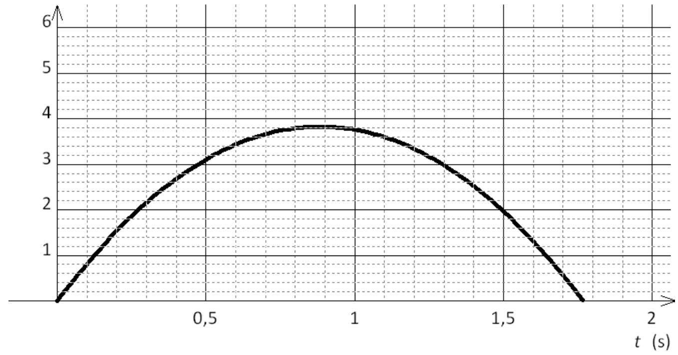
2.1. Déterminer par le calcul le temps dont dispose le joueur pour récupérer le ballon avant que celui-ci ne touche le sol.
Vérifier la valeur obtenue en faisant clairement apparaître la réponse sur l'un des graphes du tableau **page 4**

2.2. Déterminer de deux manières différentes la valeur de la vitesse v_1 du joueur pour que la chandelle soit réussie.

Tableau rassemblant les représentations graphiques de l'évolution dans le temps des grandeurs *x*, *y*, v_x et v_y.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Equation : ....

Justification : ....
....
....
....</td>
<td>Equation : ....

Justification : ....
....
....
....</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Equation : ....

Justification : ....
....
....
....</td>
<td>Equation : ....

Justification : ....
....
....
....</td>
</tr>
</table>